Les Equations de Maxwell dans le vide

Table des matières

.

L'étude de l'électromagnétisme statique et des phénomènes d'induction permettent d'établir des équations locales pour le champ électromagnétique. Ces équations, proposées par James Clerk Maxwell [1] dans une série de publications s'étalant de 1856 à 1864, constituent l'expression même des lois fondamentales de l'électromagnétisme classique, permettant de décrire la structure du champ électromagnétique.

1. James Clerk Maxwell (13 juin 1831 à Édimbourg, en Écosse - 5 novembre 1879) est un physicien et mathématicien écossais. Il est principalement connu pour avoir unifié en un seul ensemble d'équations, les équations de Maxwell, l'électricité, le magnétisme et l'induction, en incluant une importante modification du théorème d'Ampère. Ce fut à l'époque le modèle le plus unifié de l'électromagnétisme. Il est également célèbre pour avoir interprété, dans un article en quatre parties publié dans Philosophical Magazine intitulé On Physical Lines of Force, la lumière comme étant un phénomène électromagnétique en s'appuyant sur les travaux de Michael Faraday. Il a notamment démontré que les champs électriques et magnétiques se propagent dans l'espace sous la forme d'une onde et à la vitesse de la lumière.

Nous étudions dans ce chapitre la validité de ces équations, qui s'apparentent aux équations du mouvement pour le champ électromagnétique. Nous développerons également l'aspect énergétique associé au champ électromagnétique.

1 Equations de Maxwell dans le vide

Ces équations portent le nom d'équations de MAXWELL dans le vide. Cette dénomination est trompeuse car ces équations sont valables tout le temps. Elles s'appliquent en présence de charges et de courant c'est à dire dans un vide qui contient de la matière. On les nomme ainsi par opposition aux équations de MAXWELL dans les milieux que l'on n'étudiera pas cette année. Le socle de l'électromagnétisme repose sur cinq équations : les quatre équations de Maxwell et l'expression de la force de Lorentz. Ces équations sont écrites sous leur forme locale ci-dessous, où ρ désigne la densité volumique de charge et $\overrightarrow{j}$ la densité volumique de courant de conduction.

L'équation de Maxwell-Gauss notée (MG) :

$$\boxed{\operatorname{div}\overrightarrow{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}}$$

L'équation de Maxwell-Flux magnétique notée $(M\Phi)$:

$$\boxed{\operatorname{div}\overrightarrow{B} = 0}$$

L'équation de Maxwell-Faraday notée (MF) :

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{E} = -\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}}$$

L'équation de Maxwell-Ampère notée (MA) :

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{B} = \mu_0\overrightarrow{j} + \epsilon_0\mu_0\frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}}$$

La force de Lorentz (rappel) :

$$\boxed{\overrightarrow{F}_L = q\left(\overrightarrow{E} + \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}\right)}$$

2 Forme intégrale des équations de Maxwell dans le vide

2.1 Equation de Maxwell-Gauss

Considerons une surface fermée $\mathcal{S}$ delimitant un volume $\mathcal{V}$ et notons $\overrightarrow{\mathrm{d}S}$ un élément de surface orienté suivant la normale sortante. Calculons le flux du champ électrique sortant de la surface S en utilisant le théorème de Green-Ostrogradsky (cf. formulaire) et l'équation de Maxwell-Gauss :

2.2 Equation de Maxwell-Flux

Considerons une surface fermée $\mathcal{S}$ delimitant un volume $\mathcal{V}$ et notons $\overrightarrow{\mathrm{d}S}$ un élément de surface orienté suivant la normale sortante. Calculons le flux du champ magnétique sortant de la surface S en utilisant le théorème de Green-Ostrogradsky (cf. formulaire) et l'équation Maxwell-Flux :

2.3 Equation de Maxwell-Faraday

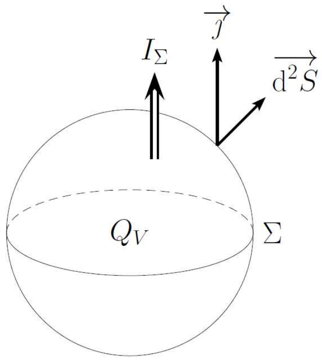
Soit un contour $\mathcal{C}$ fermé et fixe et notons $\mathcal{S}$ une surface (fixe) s'appuyant sur le contour $\mathcal{C}$ et dont la normale est orientée, à partir de l'orientation de $\mathcal{C}$, suivant la règle du tire-bouchon. Calculons la circulation sur $\mathcal{C}$ du champ électrique $\overrightarrow{E}$ en utilisant le théorème de STOKES (cf. formulaire) et l'équation MAXWELL-FARADAY :

2.4 Equation de Maxwell-Ampère

Soit un contour $\mathcal{C}$ fermé et fixe et notons $\mathcal{S}$ une surface (fixe) s'appuyant sur le contour $\mathcal{C}$ et dont la normale est orientée, à partir de l'orientation de $\mathcal{C}$, suivant la règle du tire-bouchon. Calculons la circulation sur $\mathcal{C}$ du champ magnétique $\overrightarrow{E}$ en utilisant le théorème de STOKES (cf. formulaire) et l'équation MAXWELL-AMPÈRE :

3 Equation de conservation de la charge électrique

Considérons une surface fermée et fixe $\mathcal{S}$ contenant un volume $\mathcal{V}$ et notons $Q(t)$ la charge électrique totale contenue dans ce volume à la date t. La charge totale contenue dans $\mathcal{V}$ ne peut varier que si des charges rentrent ou sortent de la surface $\mathcal{S}$, c'est-à-dire s'il existe un courant électrique qui traverse la surface. Autrement dit, il n'y a pas de création spontanée de charge électrique.



On note I l'intensité du courant traversant la surface. On a alors :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}Q(t)}{\mathrm{d}t} = -I}$$

le signe « - »provenant du fait que la charge $Q(t)$ diminue lorsque $I > 0$.

4 Potentiels électromagnétiques

Comme la divergence d'un rotationnel est toujours nulle, l'équation de Maxwell-Flux $\mathrm{div}\overrightarrow{B} = 0$ conduit à l'existence d'un potentiel vecteur $\overrightarrow{A}$ tel que :

$$\boxed{\overrightarrow{B} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{A}}$$

De l'équation de Maxwell-Faraday on peut alors en déduire qu'il existe aussi un potentiel scalaire V tel que :

$$\boxed{\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V - \frac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t}}$$

Démonstration :

5 Description énergétique du champ électromagnétique

5.1 Densité volumique d'énergie

Dans les chapitres précédents, nous avons établi les expressions des densités volumiques d'énergie électrique $\mathcal{E}_e$ et magnétique $\mathcal{E}_m$ $(J.m^{-3})$:

$$\boxed{\mathcal{E}_e = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} \text{ et } \mathcal{E}_m = \frac{B^2}{2\mu_0}}$$

Ces expressions sont valables, même en regime dépendant du temps, dans tout milieu de permittivite ϵ_0 et de permeabilite μ_0. La densite volumique d'énergie électromagnetique $\mathcal{E}_{em}$ est alors la somme des contributions électriques et magnétiques :

$$\boxed{\mathcal{E}_{em} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}}$$

5.2 Bilan énergétique sous forme locale

En dérivant par rapport au temps l'expression de $\mathcal{E}_{em}$ puis en utilisant les équations de Maxwell, on montre que :

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{E}_{em}}{\partial t} = -\overrightarrow{j}.\overrightarrow{E} - \mathrm{div}\left(\frac{\overrightarrow{E}\wedge\overrightarrow{B}}{\mu_0}\right)}$$

Démonstration :

5.3 Vecteur de Poyting

On définit le vecteur flux de puissance (en $W.m^{-2}$) ou vecteur de Poynting, noté $\overrightarrow{\Pi}$, associé au champ électromagnétique :

$$\boxed{\overrightarrow{\Pi} = \frac{\overrightarrow{E}\wedge\overrightarrow{B}}{\mu_0}}$$

5.4 Bilan énergétique sous forme intégrale et interprétation physique

La variation d'énergie électromagnétique dans un volume donné est l'opposée de la somme de :
⋆ la puissance cédée aux porteurs de charges mobiles
⋆ la puissance rayonnée vers l'extérieur
Le bilan de puissance électromagnétique est décrit par l'équation de Poynting qui peut se mettre sous la forme integrale :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\iiint_{\mathcal{V}} \mathcal{E}_{em}\mathrm{d}\tau\right) = -\oiint_{\mathcal{S}} \overrightarrow{\Pi}.\mathrm{d}\overrightarrow{S} - \iiint_{\mathcal{V}} \overrightarrow{j}\,.\overrightarrow{E}\,\mathrm{d}\tau}$$

Démonstration : Reprenons le bilan énergétique local et intrégrons ce bilan sur un volume fixe quelconque $\mathcal{V}$ délimité par une surface fermée $\mathcal{S}$