Mouvement des particules chargées

Table des matières

1 Force de Lorentz

La force électromagnétique $\overrightarrow{F}_L$, dite force de LORENTZ[1], subie par une particule de masse m et de charge q, se trouvant, à la date t, au point M du référentiel galiléen $\mathcal{R}$, en présence d'un champ électrique $\overrightarrow{E}(M,t)$ et d'un champ magnétique $\overrightarrow{B}(M,t)$, se déplaçant à la vitesse $\overrightarrow{v}(M,t)$, est donnée par :

$$\boxed{\overrightarrow{F}_L = q\left(\overrightarrow{E}(M,t) + \overrightarrow{v}(M,t) \wedge \overrightarrow{B}(M,t)\right)}$$

Dans le cas de champs uniformes et indépendants du temps nous avons :

$$\boxed{\overrightarrow{F}_L = q\left(\overrightarrow{E} + \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}\right)}$$

1. Hendrik Antoon Lorentz (18 juillet 1853 à Arnhem, Pays-Bas - 4 février 1928 à Haarlem, Pays-Bas) est un physicien néerlandais. Il est co-lauréat avec Pieter Zeeman du prix Nobel de physique de 1902. Il a reçu en 1908 la Médaille Rumford. Il fut lauréat de la Médaille Franklin en 1917 pour ses travaux sur la nature de la lumière et la constitution de la matière. Il reçut également la médaille Copley en 1918.

Compte tenu des ordres de grandeurs, le poids $m\overrightarrow{g}$ de la particule pourra toujours être négligé devant la force de LORENTZ. On négligera, à priori, toute force de frottements, sauf si cela est précisé.

2 Particule chargée dans E uniforme stationnaire

2.1 Rôle accélérateur de E

Connaissant le potentiel électrostatique V, on peut en déduire le champ par $\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{grad}\,V$. Lorsqu'une particule de charge q se déplace dans ce champ, elle subie la force $\overrightarrow{F} = -\overrightarrow{grad}\,(qV)$ qui dérive de l'énergie potentielle $\mathcal{E}_P = qV$.
L'énergie mécanique $\mathcal{E}_M = \frac{1}{2}mv^2 + qV$ se conserve en l'absence de forces non conservatives (frottements négligés), on aura donc :

$$\boxed{\frac{1}{2}mv_1^2 + qV_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 + qV_2}$$

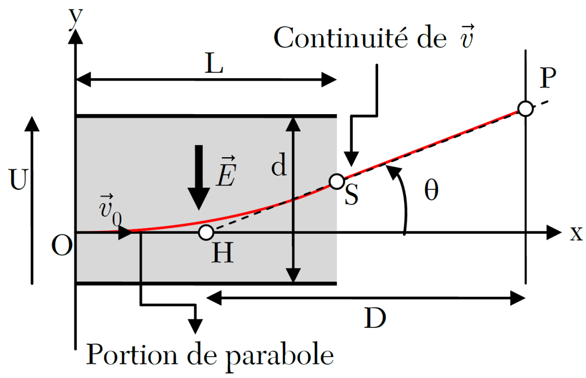
$$\boxed{\Rightarrow v_2^2 = v_1^2 + 2\frac{q}{m}(V_1 - V_2)}$$

La particule pourra donc être accélérée en choisissant positif le signe de $q(V_1 - V_2) = qU$ qui est homogène à une énergie que l'on peut exprimer en électron-volts ($1eV = 1,6.10^{-19}J$).

2.2 Déviation dans un champ électrique transverse

Considérons une particule [2] de masse m et de charge q (on prendra $q = -e < 0$ en considérant un faisceau d'électrons) traversant l'espace entre les armatures métalliques d'un condensateur plan, soumis à la ddp U ($U > 0$) (voir figure ci-dessous).

2. http://www.sciences.univ-nantes.fr/physique/perso/gtulloue/Meca/Charges/q_dans_E1.html



La particule préalablement accélérée pénètre en O avec une vitesse initiale $\overrightarrow{v_0} = v_0 \overrightarrow{u}_x$. On note d l'espacement entre les armatures de longueur L et on suppose le champ E uniforme dans l'espace entre les armatures et nul ailleurs. On rappelle que $\overrightarrow{E} = -\frac{U}{d}\overrightarrow{u}_y$.

Cherchons à exprimer la déviation y_S à la sortie du condensateur, puis à caractériser la trajectoire SP à l'extérieur des armatures, dans l'hypothèse où la particule ne rencontre pas une armature en sortie du condensateur.

Le P.F.D. appliqué à l'électron entre les plaques donne :

.
.
.
.
.

En projection sur les axes Ox et Oy, on en déduit :

.
.
.
.
.

Une première intégration conduit à :

.
.
.
.
.

Une seconde intégration donne les équations paramétriques de la trajectoire :

.
.
.

.
.
On en déduit l'équation de la trajectoire de O à S qui est parabolique :
.
.
.
.
.
À la sortie du condensateur, en x = L, on en déduit $y_S =$
.
.
.
.
.
La tangente à la parabole fait avec l'axe (Ox) un angle θ tel que :
.
.
.
.
.
L'équation cartésienne de cette tangente est du type :
.
.
.
.
.
On détermine b en écrivant que la tangente passe par le point S :
.
.
.
.
.
Qui conduit à $b =$
.
.
.
.
.
Cette tangente coupe l'axe (Ox) au point H, d'abscisse $x_H =$

À l'extérieur des armatures, la particule n'est plus soumise qu'à son poids, négligé : on a donc un système isolé, et la trajectoire SP est rectiligne. L'ordonnée du point d'impact P sur un écran situé à l'abscisse $x_P = x_H + D = \frac{L}{2} + D$, vérifie :
.
.
.
.

3 Particule chargée dans B uniforme stationnaire

On considere une particule de masse m et de charge q qui penètre en O à l'instant initial avec la vitesse $\overrightarrow{v_0}$ dans une region de l'espace ou règne un champ magnétique uniforme et independant du temps $\overrightarrow{B} = B_0 \overrightarrow{u}_z$. On suppose que $\overrightarrow{v_0} = v_{0x} \overrightarrow{u}_x + v_{0z} \overrightarrow{u}_z$.
L'équation du mouvement de la particule plongée dans $\overrightarrow{B}$ s'écrit :

$$\boxed{m \frac{d\overrightarrow{v}}{dt} = q \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}}$$

On peut noter que la puissance de cette force magnetique est nulle donc d'après le théorème de l'énergie cinétique

$$\boxed{\|\overrightarrow{v}\| = cst}$$

En notant $\overrightarrow{v} = \left\{ \begin{array}{l} \ddot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{array} \right.$, le PFD s'écrit : $\left| \begin{array}{l} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{array} \right. = \frac{q}{m} \left| \begin{array}{l} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{array} \right. \wedge \left| \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ B \end{array} \right. = \frac{qB}{m} \left| \begin{array}{l} \dot{y} \\ -\dot{x} \\ 0 \end{array} \right.$

⋆ En projection sur (Oz) on obtient :
.
.
.
.
.
⋆ En projection sur (Oxy) on obtient :
.
.

.
.
.
qui donne par intégration par rapport au temps :
.
.
.
.
.
On reporte ensuite $\dot{y}$ obtenu par (1) dans (4) pour trouver :

$$\boxed{\ddot{x} + \left(\frac{qB}{m}\right)^2 x = 0}$$

On reporte ensuite $\dot{x}$ obtenu par (2) dans (3) pour trouver :

$$\boxed{\ddot{y} + \left(\frac{qB}{m}\right)^2 y = -\frac{qB}{m} v_{0x}}$$

On pose $\omega_c = \frac{|q|B}{m}$, appelée **pulsation cyclotron** et $\epsilon = \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ -1 \end{array} \right.$

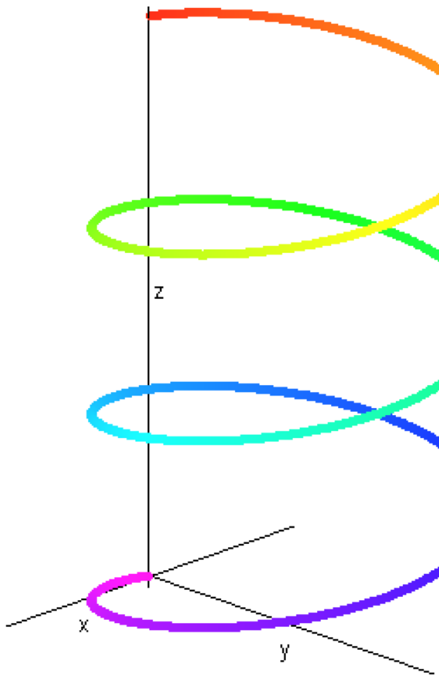
Les solutions des deux équations différentielles sont :

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{l} x(t) = A\cos(\omega_c t) + B\sin(\omega_c t) \\ y(t) = A'\cos(\omega_c t) + B'\sin(\omega_c t) - \epsilon\frac{v_{0x}}{\omega_c} \end{array} \right.}$$

Les conditions initiales $\left\{ \begin{array}{l} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{array} \right.$ et $\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_0 = v_{0x} \\ \dot{y}_0 = 0 \end{array} \right.$ donnent :

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{l} x(t) = \frac{v_{0x}}{\omega_c}\sin(\omega_c t) \\ y(t) = -\epsilon\frac{v_{0x}}{\omega_c}(1 - \cos(\omega_c t)) \end{array} \right.}$$

La trajectoire [3] est une hélice dont nous pouvons déterminer les caractéristiques :



3. http://www.sciences.univ-nantes.fr/physique/perso/gtulloue/Meca/Charges/general.html

4 Modèle de la conduction dans les métaux

4.1 Vitesse d'ensemble des électrons

La conduction du courant est due au mouvement d'ensemble des électrons de conduction des métaux ou des semi-conducteurs ou au mouvement des ions dans les liquides. La vitesse d'ensemble $\overrightarrow{v}$ des électrons de conduction est nulle en l'absence de champ électrique extérieur. Mais lorsque l'on applique un champ électrique extérieur, les électrons acquièrent une vitesse d'ensemble $\overrightarrow{v}$ colinéaire au champ électrique $\overrightarrow{E}$.
L'existence d'interactions entre les électrons et le milieu est modélisée par une force de type frottement visqueux $\overrightarrow{f} = -\frac{m}{\tau}\overrightarrow{v}$.

L'équation différentielle vérifiée par $\overrightarrow{v}$ est donc :

$$\boxed{m\frac{d\overrightarrow{v}}{dt} = -e\overrightarrow{E} - \frac{m}{\tau}\overrightarrow{v}}$$

On remarque que τ est le temps caractéristique d'établissement du régime établi pour lequel

$$\boxed{\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}_{lim} = -\frac{e\tau}{m}\overrightarrow{E}}$$

4.2 Vecteur densité de courants de conduction

Un mouvement d'ensemble des charges est un courant électrique, dont le vecteur densité volumique de courant $\overrightarrow{j}$ vaut :

$$\boxed{\overrightarrow{j} = nq\overrightarrow{v}}$$

en $A.m^{-2}$, où n représente le nombre de porteurs mobiles par unité de volume et q la charge de chacun des porteurs. Dans le cas de la conduction métallique envisagée, n est le nombre d'électrons de conduction par unité de volume, $q = -e$ et $\overrightarrow{v}$ est la vitesse d'ensemble des électrons.

4.3 Loi d'Ohm locale

On peut considérer que le régime établi s'instaure très rapidement car typiquement τ est de l'ordre de $10^{-14}s$.
On obtient alors

$$\boxed{\overrightarrow{v} = -\frac{e\tau}{m}\overrightarrow{E} = \mu\overrightarrow{E}}$$

où μ est la mobilité des électrons et

$$\boxed{\overrightarrow{j} = nq\overrightarrow{v} = \frac{ne^2\tau}{m}\overrightarrow{E}}$$

C'est la **loi d'Ohm locale** :

$\boxed{\overrightarrow{j} = \gamma\overrightarrow{E}}$ où $\boxed{\gamma = \frac{ne^2\tau}{m}}$ est la conductivité électrique du milieu.

4.4 Loi d'Ohm intégrale, résistance d'un conducteur filiforme

Soit un morceau de fil métallique de longueur L et de section S, soumis à une ddp U.