Magnétostatique

Table des matières

1 Phénomènes magnétiques

Jusqu'à présent nous n'avons abordé que le cas des particules chargées immobiles, ou encore des conducteurs (ensembles de particules) en équilibre électrostatique. Que se passe-t-il lorsqu'on considère enfin le mouvement des particules ? Il n'existe pas de charge magnétique comme il existe des charges électriques !
Le champ magnétique va servir à caractériser la force qui s'exerce entre un circuit parcouru par un courant et un autre circuit parcouru par un courant, ou entre un circuit parcouru par un courant et un matériau magnétique.

2 Distributions de courant

2.1 Intensité électrique

L'intensité $I(S,t)$ du courant électrique à travers une surface S est liée à la chage dQ_m qui traverse S pendant dt par la relation :

$$\boxed{dQ_m = I(S,t)dt}$$

L'intensité, grandeur électrique, dépend de l'orientation de S.

2.2 Vecteur densité volumique de courants

Considérons un ensemble de particules de charges q, de densité particulaire n et ayant un mouvement d'ensemble à la vitesse $\overrightarrow{v}$. Nous appellerons densité volumique de charges mobiles la quantité :

$$\boxed{\rho_m = nq}$$

Le vecteur densité volumique de courant associé à un mouvement d'ensemble à la vitesse $\overrightarrow{v}$ est :

$$\boxed{\overrightarrow{j} = \rho_m \overrightarrow{v} = nq\overrightarrow{v}}$$

Ce vecteur s'exprime en Am^{-2}.
L'intensité du courant traversant une surface S est égale au flux de $\overrightarrow{j}$ à travers cette surface :

$$\boxed{I(S,t) = \iint_S \overrightarrow{j}(P,t).\overrightarrow{n}\, dS}$$

Démonstration :
.
.
.
.
.
.
.
.
.

Définition : On dit que le flux de $\overrightarrow{j}$ est conservatif si son flux à travers une surface fermée est nul.

Propriété : En **régime permanent**, $\overrightarrow{j}$ **est à flux conservatif**. Cela implique que le courant électrique est le même à travers toutes les sections d'un même tube de courant.
Démonstration :
.
.
.
.
.

2.3 Courants linéiques ou filiformes

Les conducteurs de faible section peuvent être assimilés à des fils. Le courant linéïque est alors tout simplement l'intensité du courant parcourant le fil.

3 Champ magnétostatique

3.1 Formule de Biot et Savart

En un point M quelconque de l'espace, le champ magnétique créé par un circuit parcouru par un courant permanent I est :

$$\boxed{\overrightarrow{B}(M) = \int_{P\in\mathcal{C}} \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,\overrightarrow{dl}\wedge\overrightarrow{PM}}{PM^3}}$$

en tesla (T) avec $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}\,H.m^{-1}$ perméabilité du vide.

4 Invariances et symétries

4.1 Invariances

Comme son analogue électrostatique, le champ magnétostatique présente les mêmes invariances que ses sources : les courants électriques.

Si les courants sont invariants par rotation et/ou par translation, $\overrightarrow{B}$ ne dépend pas des variables correspondantes.

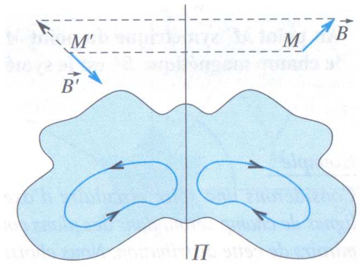
4.2 Plan de symétrie

Définition : Une distribution est symétrique par rapport à un plan Π si, pour tout point M il existe un symétrique M', et si

$$\boxed{I\,\overrightarrow{dl}(M) = sym\left\{I\,\overrightarrow{dl}(M')\right\}}$$

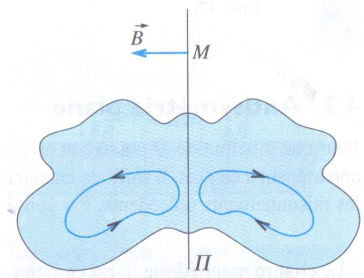
Propriété 1 : $\overrightarrow{B}$ est transformé en son antisymétrique par un plan Π

$$\boxed{\overrightarrow{B}(M') = -sym\,\overrightarrow{B}(M)}$$



Propriété 2 : En un point M du plan de symétrie Π, $\overrightarrow{B}$ est perpendiculaire à Π, soit

$$\boxed{\overrightarrow{B}(M \in \Pi)\perp\Pi}$$



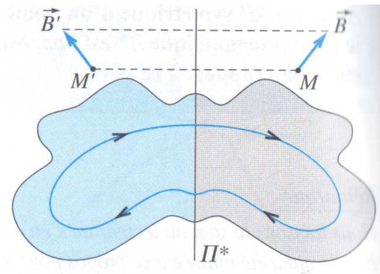
4.3 Plan d'antisymétrie

Définition : Une distribution est antisymétrique par rapport à un plan Π^* si, pour tout point M il existe un symétrique M', et si

$$\boxed{I\,\overrightarrow{dl}(M) = -sym\left\{I\,\overrightarrow{dl}(M')\right\}}$$

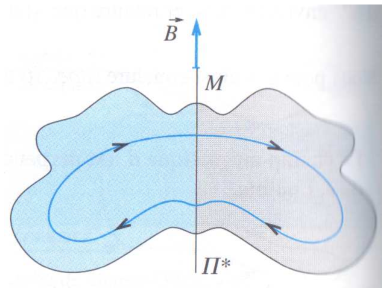
Propriété 1 : $\overrightarrow{B}$ est transformé en son symétrique par un plan Π^* :

$$\boxed{\overrightarrow{B}(M') = sym\,\overrightarrow{B}(M)}$$



Propriété 2 : En un point M du plan d'antisymétrie Π^*, $\vec{B}$ est contenu dans Π^*, soit

$$\boxed{\vec{B}(M \in \Pi^*) \in \Pi^*}$$



5 Exemples de calculs direct

5.1 Portion de fil - fil infini

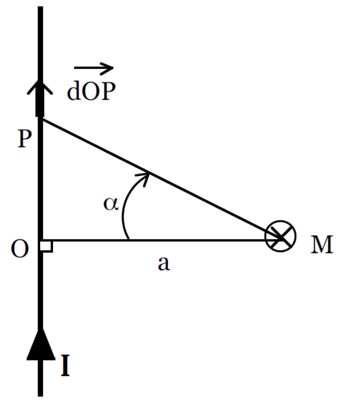
Soit une portion de fil d'axe Oz parcouru par un courant d'intensité I. Calculons le champ magnétostatique en un point M situé à une distance r de l'axe. On donnera le résultat en fonction de α_1 et α_2 angles sous lesquels M voit les extrémités du fil. Montrons que :

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r}(\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1)\,\vec{e}_\theta}$$

et que si la longueur du fil est grande par rapport à r alors :

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\,\vec{e}_\theta}$$

Démonstration :

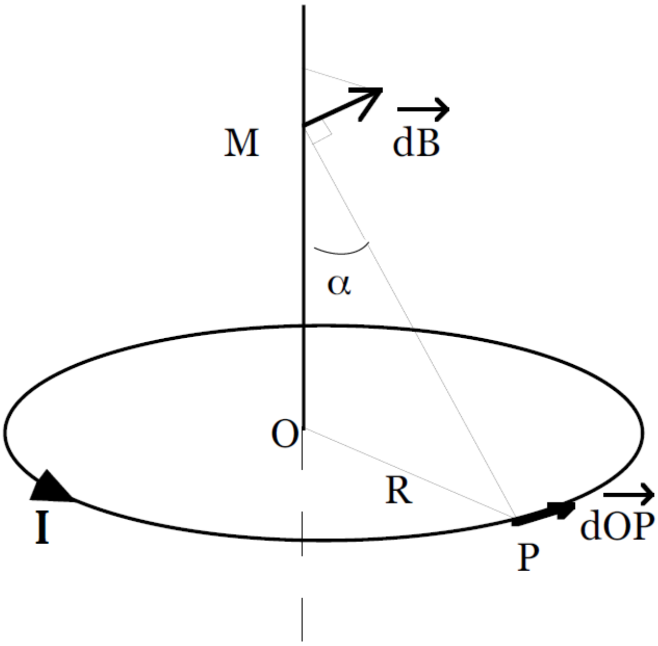


.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.

5.2 Champ sur l'axe d'une spire circulaire

Soit une boucle de rayon R parcourue par un courant d'intensité I. Calculons le champ magnétostatique en un point M de l'axe de la boucle. On notera α l'angle sous lequel M voit la boucle.

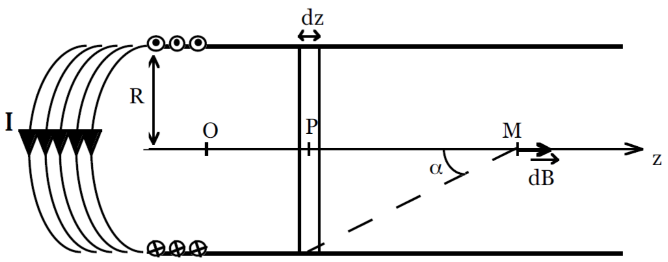
$$\boxed{\overrightarrow{B} = \frac{\mu_0 I}{2r} \sin^3 \alpha \ \overrightarrow{e}_z}$$



Démonstration :

5.3 Champ sur l'axe d'un solénoïde

Un solénoïde est constitué d'un enroulement d'un fil conducteur verni autour d'un cylindre. On suppose que ce fil est suffisamment mince pour pouvoir modéliser ce solénoïde comme une juxtaposition de spires coaxiales, avec N **spires par unité de longueur**. Chaque spire est parcourue par un courant permanent I. Comme pour la spire simple vue plus haut, les propriétés de symétrie du courant montrent que le champ magnétique du solénoïde, qui est la somme vectorielle du champ créé par chaque spire, est suivant (Oz) sur l'axe du solénoïde.

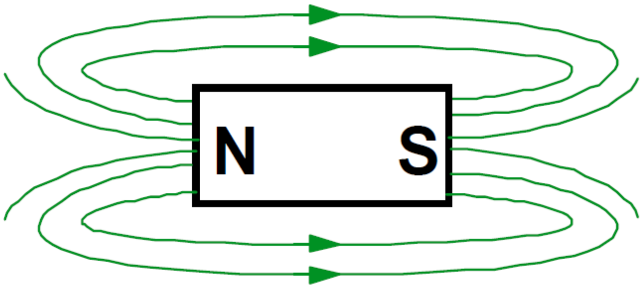


Autour d'un point P situé en z, sur une épaisseur $dOP = dz$, il y a Ndz spires. Ces spires créent donc un champ en un point M quelconque de l'axe :

5.4 Lignes de champ

Une **ligne de champ** est tangente en chacun de ses points M au champ $\overrightarrow{B}(M)$.

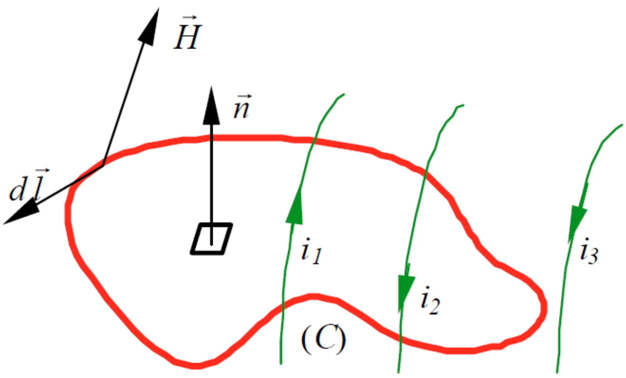
Deux lignes de champ ne peuvent se couper que si $\overrightarrow{B}(M) = \overrightarrow{0}$ ou $\overrightarrow{B}(M)$ non défini.
Voilà les lignes de champ d'un aimant permanent :



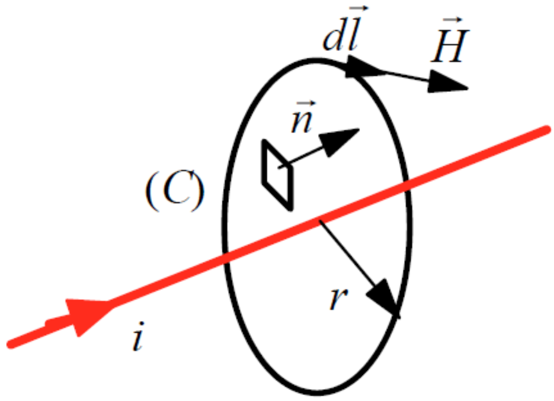
6 Théorème d'Ampère

La circulation du champ magnétostatique le long d'une courbe orientée fermée $\mathcal{C}$ est égal à la somme algébrique des courants enlacés par ce contour :

$$\boxed{\oint_{\mathcal{C}} \overrightarrow{B}.\overrightarrow{dl} = \mu_0 I_{enlace}}$$



Vérifions en calculant la circulation le long d'un cercle de rayon r enlaçant un fil infini parcouru par un courant d'intensité I :



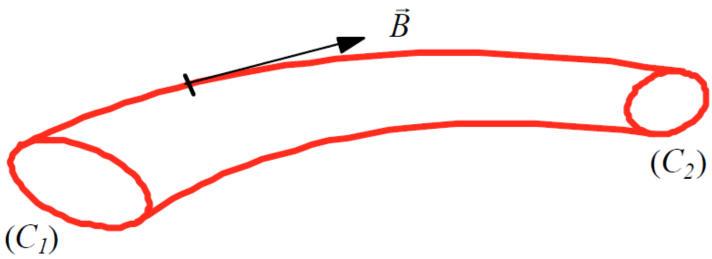
$$\boxed{\oint_{\mathcal{C}} \overrightarrow{B}.\overrightarrow{dl} = \oint_{\mathcal{C}} \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\overrightarrow{e}_\theta.rd\theta\overrightarrow{e}_\theta = \mu_0 I}$$

7 Flux du champ magnétostatique

Définition : On dit que le flux de $\overrightarrow{B}$ est conservatif si son flux à travers une surface fermée est nul.
Propriété : Nous admettrons le caractère conservatif du flux de $\overrightarrow{B}$:

$$\boxed{\oiint_{\mathcal{S}} \overrightarrow{B}.\overrightarrow{n}_{ext}dS = 0}$$

Ce qui nous permet de montrer (sur un tube de champ) que lorsque les lignes de champ $\overrightarrow{B}$ se resserrent, le champ augmente, lorsqu'elles sont parallèles le champ est constant et lorsqu'elles s'écartent, le champ diminue.



Démonstration : .

.

.

.
.
.
.

8 Comparaison des propriétes des champs statiques

	$\overrightarrow{E}$	$\overrightarrow{B}$
circulation	$\oint_{\mathcal{C}} \overrightarrow{E}.\overrightarrow{dl} = 0$	$\oint_{\mathcal{C}} \overrightarrow{B}.\overrightarrow{dl} = \mu_0 I_{enlace}$
flux	$\oiint_{\mathcal{S}} \overrightarrow{E}.\overrightarrow{n}_{ext} dS = \dfrac{Q_{int}}{\epsilon_0}$	$\oiint_{\mathcal{S}} \overrightarrow{B}.\overrightarrow{n}_{ext} dS = 0$

$\overrightarrow{E}$ est à circulation conservative.

$\overrightarrow{B}$ est à flux conservatif.

$\overrightarrow{E}$ diverge (ou converge) à partir des charges.

$\overrightarrow{B}$ tourne autour des courants.