Théorème de Gauss

Table des matières

1 Théorème de Gauss

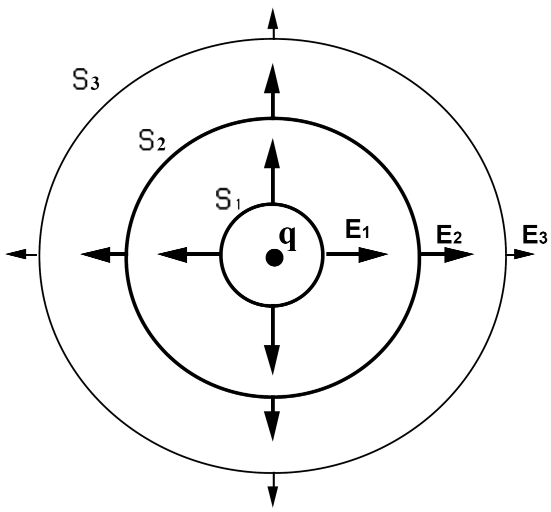
1.1 Enoncé du théorème de Gauss

Le flux du champ électrostatique sortant d'une surface fermée $\mathcal{S}$ est égal à la charge totale Q_{int} enfermée dans cette surface divisée par ϵ_0

$$\boxed{\Phi = \oiint_{\mathcal{S}} \overrightarrow{E}(P).\overrightarrow{n}_{ext}(P)dS = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}}$$

où P est un point de la surface, $\overrightarrow{E}(P)$ le champ électrostatique en P et $\overrightarrow{n}_{ext}(P)$ le vecteur unitaire normal à la surface en P, qui est dirigé vers l'extérieur de la surface par convention.

Vérifions ce théorème dans le cas où la distribution de charge est une charge ponctuelle unique q placée en O. On utilise les coordonnées sphériques, les mieux adaptées au problème. Calculons le flux sortant d'une surface sphérique de rayon r enfermant la charge ponctuelle :

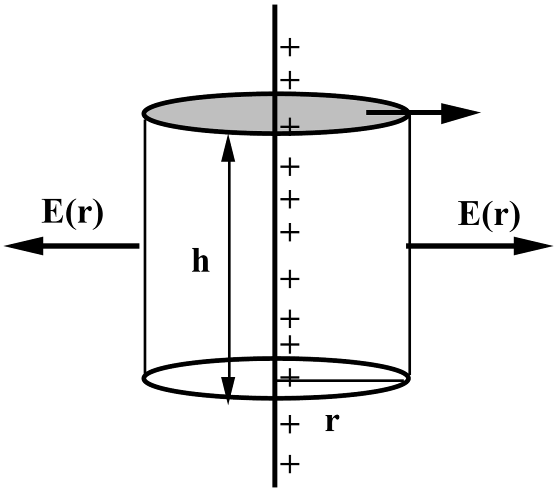


$$\boxed{\Phi = \oiint_{\mathcal{S}} \vec{E}.\vec{n}_{ext}\, dS = \oiint_{\mathcal{S}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\,\vec{e}_r.\vec{e}_r\, dS = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\oiint_{\mathcal{S}} dS = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}}$$

Le théorème de Gauss est d'une grande généralité, il n'est utilisable en pratique que si le système présente un degré de symétrie élevé. C'est parce que le champ électrique est toujours normal à la surface de la sphère de rayon r et d'intensité constante en tout point P de la sphère que l'expression du flux est particulièrement simple et utilisable. Dans la pratique, il faut pouvoir définir une surface de Gauss fermée sur laquelle le champ électrique est constant et radial, ou non constant mais tangentiel (cf. TD).

1.2 Exemple 1 : Le fil chargé infini

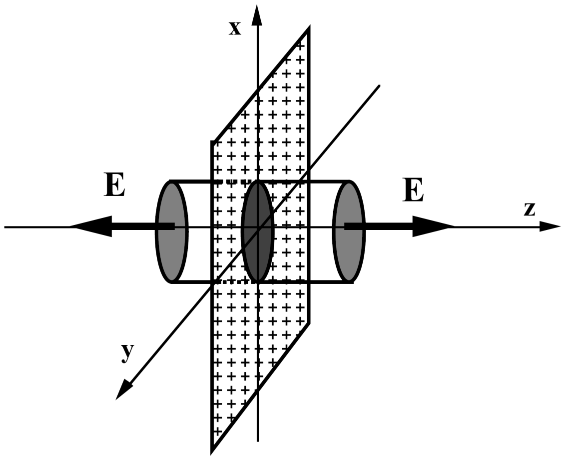
Considerons le fil infini chargé porté par l'axe (Oz) possédant la densité de linéïque de charge λ. On utilise les coordonnées cylindriques, les mieux adaptées au problème. Determinons le champ électrique crée à la distance r de ce fil en appliquant le théorème de Gauss à la surface de Gauss fermée constituée d'un cylindrique creux de rayon r de hauteur h, et des deux disques de rayon r couvrant ses extrémités. Il faut commencer par déterminer les symétries et les invariances de $\vec{E}$.



.
.
.
.
.
.
.
.
.

1.3 Exemple 2 : Le plan chargé infini

Considérons le plan (xOy) chargé avec la densité de charge uniforme σ. Déterminons le champ électrique crée à la distance z de ce plan en appliquant le théorème de Gauss à la surface de Gauss fermée constituée d'un cylindre creux d'axe (Oz) fermé par les deux disques grisés de surface S placés de part et d'autre du plan chargé aux cotes $+z$ et $-z$. Il faut commencer par déterminer les symétries et les invariances de $\overrightarrow{E}$.


x
E
E
z
y

2 Analogie gravitationnelle

Tous les résultats précédents ont leur analogue pour la gravitation en remplaçant la charge q par la masse m et $\frac{1}{\epsilon_0}$ par $-4\pi\mathcal{G}$ où $\mathcal{G}$ désigne la constante de gravitation.

Si on place une masse m' soumise à la force de gravitation $\overrightarrow{F}$ dans le champ créé par m, le champ de gravitation $\overrightarrow{G}$ est définit tel que :

$$\boxed{\overrightarrow{F} = m'\overrightarrow{G} \quad \text{avec} \quad \overrightarrow{G} = -\mathcal{G}\frac{m}{r^2}\overrightarrow{e}_r}$$

Et l'énergie potentielle d'interaction gravitationnelle E_p s'écrit donc :

$$\boxed{E_p = m'V \quad \text{avec} \quad V = -\mathcal{G}\frac{m}{r}\,(\text{potentiel gravitationnel})}$$

Le théorème de Gauss s'écrit :

$$\boxed{\Phi = \oiint_{\mathcal{S}} \overrightarrow{G}.\overrightarrow{n}_{ext}dS = -4\pi\mathcal{G}M_{int}}$$