Propagation des Ondes Electromagnétiques dans le vide

Table des matières

1 Qu'est-ce qu'une onde

1.1 Onde et équation de D'Alembert

Définition : Une onde est un champ scalaire ou vectoriel noté ψ , dépendant du temps et des variables d'espace, qui vérifie l'équation de D'ALEMBERT :

$$\Delta\psi(\vec{r},t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi(\vec{r},t)}{\partial t^2} = 0$$

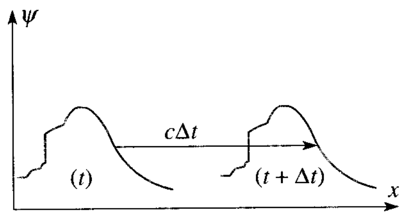
Où $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ et c est appelée la **célérité** de l'onde. Ainsi, $\psi(\vec{r}, t)$ désigne l'amplitude de l'onde au point M à l'instant t.

1.2 Solution de l'équation de d'Alembert

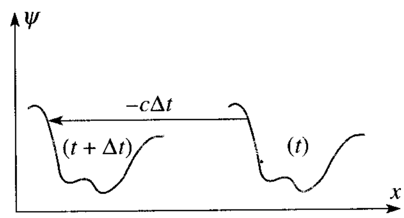
Commençons par visualiser des animations de propagation d'onde au cours du temps grâce au code Maple ci-dessous :

```
restart: with(plots):
animate(plot, [sin(Pi*(t-x/8)),x=0..32],t=0..5);
animate(plot, [sin(Pi*(t+x/8)),x=0..32],t=0..5);
```

Propriété : Une fonction de la forme $\psi = f\left(t - \frac{x}{c}\right)$ est une onde se propageant dans le sens des x croissants.
Démonstration :



Doc. 7a. *Onde plane progressive se propageant dans le sens des x croissants.*



Doc. 7b. *Onde plane progressive se propageant dans le sens des x décroissants.*

Propriété : De même, une fonction de la forme $\psi = g\left(t + \frac{x}{c}\right)$ est une onde se propageant dans le sens des x décroissants.

1.3 Ondes Planes Progressives

Définition : Une **Onde** est dite **Plane** si à un instant t donné, la grandeur qui carectérise l'onde qui se propage est la même en tous les points d'un plan perpendiculaire à la direction de propagation de l'onde.
Définition : Une **Onde Plane Progressive** est une onde plane qui se propage dans un sens et une direction bien déterminés. On la note en abrégé **OPP**.
Propriété : Les solutions de l'équation de d'Alembert, qui est une équation différentielle linéaire, peuvent s'écrire comme la superposition de deux OPP se propageant dans des sens opposés, on obtient alors une onde plane non progressive :

$$\psi(x,t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right) + g\left(t + \frac{x}{c}\right)$$

1.4 Ondes Planes Progressives Monochromatiques

Définition : Une Onde Plane Progressive Monochromatique (OPPM) est une OPP à variation d'amplitude sinusoïdale, elle prend donc la forme

$$\psi(x,t) = \psi_0 \cos(\omega t - kx + \varphi_0)$$

on l'appelle aussi parfois OPP Harmonique, notée OPPH.

- ω est appelée pulsation de l'onde
- la période temporelle de l'onde est $T = \frac{2\pi}{\omega}$
- $\vec{k} = k\vec{e}_x$ est le vecteur d'onde et k le nombre d'onde associé à l'onde
- la période spatiale de l'onde est $\lambda = \frac{2\pi}{k}$

Notation complexe :

2 Equation de propagation des champs

2.1 Equations de Maxwell dans un vrai vide

Par vrai vide on entend : En l'absence de charges ($\rho = 0$) et de courants ($\vec{j} = \vec{0}$). Les équations de Maxwell prennent la forme ci-dessous.

L'équation de Maxwell-Gauss notée (MG) :

$$\boxed{\operatorname{div}\overrightarrow{E} = 0}$$

L'équation de Maxwell-Flux magnétique notée $(M\Phi)$:

$$\boxed{\operatorname{div}\overrightarrow{B} = 0}$$

L'équation de Maxwell-Faraday notée (MF) :

$$\boxed{\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\overrightarrow{E} = -\frac{\partial\overrightarrow{B}}{\partial t}}$$

L'équation de Maxwell-Ampère notée (MA) :

$$\boxed{\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\overrightarrow{B} = \epsilon_0\mu_0\frac{\partial\overrightarrow{E}}{\partial t}}$$

2.2 Equation de propagation du champ électrique

Propriété : Dans le vrai vide, le champ électrique vérifie l'équation de d'Alembert, soit

$$\boxed{\overrightarrow{\Delta}\,\overrightarrow{E}(\vec{r},t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\overrightarrow{E}(\vec{r},t)}{\partial t^2} = \vec{0}}$$

avec $c^2 = \frac{1}{\epsilon_0\mu_0}$.

Démonstration :

2.3 Equation de propagation du champ magnétique

Propriété : Dans le vrai vide, le champ magnétique vérifie l'équation de d'Alembert, soit

$$\boxed{\overrightarrow{\Delta}\overrightarrow{B}(\vec{r},t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \overrightarrow{B}(\vec{r},t)}{\partial t^2} = \vec{0}}$$

avec $c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}$.

Démonstration :

3 Structure de l'OPPM

3.1 Description des champs

On note le champ électrique $\overrightarrow{E}(\vec{r},t) = E_x(\vec{r},t)\vec{e}_x + E_y(\vec{r},t)\vec{e}_y + E_z(\vec{r},t)\vec{e}_z$.
L'équation de d'Alembert s'écrit :

En projection sur $\vec{e}_x$ on obtient : $\Delta E_x(\vec{r},t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_x(\vec{r},t)}{\partial t^2} = 0$.
On peut alors chercher une solution de la forme d'une OPPM pour $E_x(\vec{r},t)$, il en est de même pour les deux autres composantes :

$$E_x(\vec{r},t) = E_{0x}\cos(\omega t - \vec{k}.\vec{r} + \varphi_{0x})$$

$$E_y(\vec{r},t) = E_{0y}\cos(\omega t - \vec{k}.\vec{r} + \varphi_{0y})$$

$$E_z(\vec{r},t) = E_{0z}\cos(\omega t - \vec{k}.\vec{r} + \varphi_{0z})$$

- ω est la pulsation de l'onde
- la période temporelle de l'onde est $T = \frac{2\pi}{\omega}$
- $\vec{k} = k\vec{u}$ est le vecteur d'onde, en notant $\vec{u}$ le vecteur unitaire de la direction de propagation de l'onde

Remarque :

3.2 Notation complexe

La représentation complexe du champ électrique est $\underline{\overrightarrow{E}} =$

Propriété : En notation complexe on vérifie que

$$\frac{\partial \underline{\overrightarrow{E}}}{\partial t} = j\omega \underline{\overrightarrow{E}}$$

$$\mathrm{div}\,\underline{\overrightarrow{E}} = \overrightarrow{\nabla}.\underline{\overrightarrow{E}} = -j\vec{k}.\underline{\overrightarrow{E}}$$

$$\mathrm{rot}\,\underline{\overrightarrow{E}} = \overrightarrow{\nabla} \wedge \underline{\overrightarrow{E}} = -j\vec{k} \wedge \underline{\overrightarrow{E}}$$

$$\overrightarrow{\Delta}\underline{\overrightarrow{E}} = -k^2 \underline{\overrightarrow{E}}$$

Démonstration :

3.3 Relation de dispersion

Propriété : L'équation de d'Alembert impose une relation entre k et ω appelée relation de dispersion

$$\boxed{k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}}$$

Il y a donc deux solutions possibles : $k = \frac{\omega}{c}$ ou $k = -\frac{\omega}{c}$.
Démonstration :

On s'intéresse par la suite à l'onde telle que $k = \frac{\omega}{c}$, qui se propage dans le sens de $\vec{u}$.

3.4 Equations de Maxwell en notation complexe

En utilisant la notation complexe on obtient
L'équation de Maxwell-Gauss(MG) :

$$\overrightarrow{k}.\underline{\overrightarrow{E}} = 0$$

L'équation de Maxwell-Flux magnétique($M\Phi$) :

$$\overrightarrow{k}.\underline{\overrightarrow{B}} = 0$$

L'équation de Maxwell-Faraday (MF) :

$$\underline{\overrightarrow{B}} = \frac{1}{c}\overrightarrow{u} \wedge \underline{\overrightarrow{E}}$$

L'équation de Maxwell-Ampère (MA) :

$$\underline{\overrightarrow{E}} = -c\overrightarrow{u} \wedge \underline{\overrightarrow{B}}$$

Démonstration :

3.5 Structure de l'OPPM

Propriété : Le passage aux grandeurs instantannées à partir des équations précédentes entraine les propriétés suivantes

1. $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{B}$ sont dits transverses, c'est-à-dire qu'ils sont perpendiculaires à la direction de propagation de l'onde car (MG) $\overrightarrow{k}.\overrightarrow{E} = 0$ et $(M\Phi)$ $\overrightarrow{k}.\overrightarrow{B} = 0$
2. $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{B}$ sont en phase d'après (MF) ou (MA)
3. $\left\|\overrightarrow{E}\right\| = c\left\|\overrightarrow{B}\right\|$ d'après (MF) ou (MA)
4. Le trièdre $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{E}, \overrightarrow{B}\right)$ est direct d'après (MF) ou (MA)

3.6 Généralisation aux OPP quelconques

Une OPP se propageant dans la direction $\overrightarrow{u}$ peut s'écrire comme la superposititon (ou somme) d'OPPM de même direction de propagation $\overrightarrow{u}$ et vérifie aussi les propriétés de structure énoncées ci-dessus.

4 Etude énergétique des OPPM

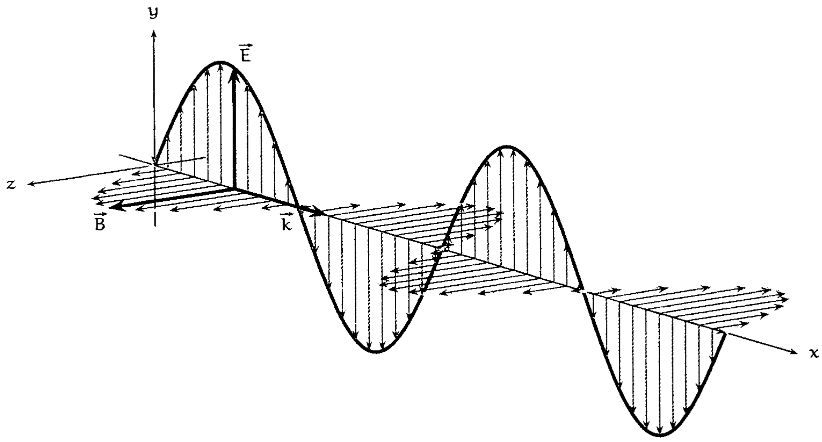
Propriété : Une onde à **polarisation rectiligne** est une onde dont les champs gardent une **direction constante au cours du temps**.

Soit une OPPM à polarisation rectiligne se propageant dans le sens des x croissants [1] :

$$\overrightarrow{E} = E_{0y}\cos(\omega t - kx)\vec{e}_y$$

Exercice d'application directe de cours : Vérifier que $\overrightarrow{E}$ satisfait aux relations de structure de l'OPPM et exprimer $\overrightarrow{B}$.

1. http://web.cortial.net/bibliohtml/oppmpr_j.html



4.1 Densité volumique d'énergie électromagnétique de l'OPPM

Propriété : La densite volumique d'énergie électromagnetique $\mathcal{E}_{em}$ de l'OPPM vaut

$$\boxed{\mathcal{E}_{em} = \epsilon_0 E^2 = \frac{B^2}{\mu_0}}$$

Démonstration :

4.2 Vecteur de Poynting de l'OPPM

Propriété : Le vecteur flux de puissance (en $W.m^{-2}$) ou vecteur de Poynting $\overrightarrow{\Pi}$ associé à l'OPPM vaut

$$\boxed{\overrightarrow{\Pi} = c\epsilon_0 E^2\,\vec{e}_x = c\mathcal{E}_{em}\,\vec{e}_x}$$

Démonstration :